جامعة البعث
كليـــة العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الميكانيك ٢

السنة الثالثة رياضيات

اسم الطالب : محمد الحسين
العلامة : 100 (مائة درجة)
المدة : ساعة ونصف

الفصل الأول 2014 - 2015

(12) السؤال الأول : أجب عن أحد السؤالين التاليين:

1. عرف عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة إلى نقطة معينة، ثم اكتب العلاقة الموافقة لحالة جسم صلب بالنسبة لنفس النقطة.
- عرف نصف قطر العطالة – عرف محور التناظر الديناميكي.

2. اكتب نص ثلاث من خصائص عزوم عطالة جسم صلب منسوب إلى جملة مقارنة ثلاثية متعامدة.

(17) السؤال الثاني : أجب عن أحد السؤالين التاليين: 1. احسب السرعة المطلقة لنقطة M . 2. احسب التسارع المطلق لنقطة M .

(7) السؤال الثالث : إذا كان الجسم الصلب صفيحة دائرية متجانسة نصف قطرها واحدة الأطوال، فأوجد I_G ، حيث G مركز كتلها، ثم عزم عطالتها بالنسبة لقطرها، واحسب I_O حيث O نقطة من محيط الصفيحة.

(9) السؤال الرابع : إذا كان الجسم الصلب كرةً متجانسة ونصف قطرها واحدة الأطوال ومركزها G ، فاحسب I_G ، ثم استنتج عزم عطالتها بالنسبة لمستو مركزي في الكرة.

(20) السؤال الخامس : أجب عن أحد السؤالين التاليين:

1. **(حل هذه المسألة مستفيداً من نتائج س4 دون إجراء أي عملية تكاملية، وأي حل بطريقة أخرى يعتبر خاطئاً)** إذا كان الجسم الصلب مجسماً ناقصياً متجانساً منسوباً لجملة المقارنة $GXYZ$ ، حيث G مركز كتل الجسم، وأنصاف محاوره $a > b > c$ ، فاحسب كلاً من I_G ، I_{GXY} ، I_{GYZ} ، I_{GXZ} ، ثم أوجد كلاً من I_O ، I_{OXY} ، I_{OYZ} ، I_{OXZ} ، حيث $O(0,-b,0)$ في $GXYZ$ و $OX // GX$ و $OZ // GZ$.

2. **إذا كان الجسم الصلب المتحرك قرصاً دائرياً نصف قطره** r ، يتدحرج بدون انزلاق على المحيط الداخلي لسلك ثابت نصف قطره R ، حيث $R > r$ ، فالمطلوب: - ارسم الشكل المناسب وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القرص. – عين المركز الآني للدوران بما لا يزيد عن سطرين. – عين كلاً من المنحني المتدحرج والمنحني القاعدة، معللاً إجابتك بما لايزيد عن سطرين.

(35) السؤال السابع : إذا كان الجسم الصلب المتحرك مخروطاً دورانياً يتحرك حول رأسه الثابت بحيث يبقى محور تناظره دوماً في المستوي الأفقي، فالمطلوب:

1. ارسم الشكل المناسب وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع المخروط.
2. أوجد السطح المتدحرج واذكر صفاته.
3. أوجد السطح القاعدة واذكر صفاته.

——— تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ——— مدرس المقرر : د.كامل محمد ———

9

مسلم تصحيح عينة للجواب

س1: أجب أحد السؤالين:

12 1.- إذا كانت O نقطة معينة و $S=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ مجموعة نقاط مادية كتلها $m_1, m_2, \dots, m_n$

فإن عزم عطالة المجموعة S بالنسبة للنقطة O نعرفه بأنه مجموع عزوم العطالة لكل نقاط المجموعة بالنسبة لـ O أي أن:

(4) $I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ و $r_i = |OA_i|$

- إذا كان I عزم عطالة بالنسبة لـ: محور أو مستقيم أو نقطة فإننا نقول عن العدد الموجب K إنه نصف قطر العطالة إذا تحققت العلاقة $I = MK^2$ (4)

- نقول عن المحور ما مثل OZ إنه محور تناظر ديناميكي بجملة المقارنة النظامية OXYZ إذا كان $I_X = I_Y$. (4)

2. (3×4) اكتب نص ثلاث من خصائص عزوم العطالة لجسم منسوب إلى جملة مقارنة نظامية OXYZ:

- إن أياً من الخصائص التالية صحيحة:

. $I_o = \frac{1}{2}(I_X + I_Y + I_Z)$ و $I_o = I_{oXY} + I_{oYZ} + I_{oZX}$ ،

$I_{oX} = I_{oXY} + I_{oXZ}$ or $I_{oY} = I_{oYZ} + I_{oXY}$, $I_{oZ} = I_{oZX} + I_{oZY}$),

$I_o = I_{oXY} + I_{oZ} = I_{oYZ} + I_{oX} = I_{oZX} + I_{oY}$

$I_{oY} + I_{oZ} \geq I_{oX}$, $I_{oX} + I_{oZ} \geq I_{oY}$

$I_{oX} + I_{oY} \geq I_{oZ}$, $I_{oZ} - I_{oX} \leq I_{oY}$

$I_{oX} - I_{oY} \leq I_{oZ}$, $I_{oY} - I_{oZ} \leq I_{oX}$

17 س2: أجب عن سؤال واحد مما يلي: الرسم المناسب في صفحة 2 يصح للجوابين

1. حساب السرعة المطلقة لنقطة M: الفرض R: OXYZ جملة مقارنة عطالية قاعدتها $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

$R_s: O_s X_s Y_s Z_s$ جملة مقارنة متحركة (كأن تكون مرتبطة بجسم متحرك مثلاً) وقاعدتها $(O_s, \vec{I_s}, \vec{J_s}, \vec{K_s})$

M نقطة تتحرك في فضاء R_s وإحداثياتها في R_s هي (X_s, Y_s, Z_s) وإحداثياتها في فضاء R هي (X, Y, Z) (4)

O_s في R هي $(X(O_s), Y(O_s), Z(O_s))$ وفي مثل هذه الحالة

نتائج النظرية: $\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$ (1) (4) حيث $\vec{V_a}$ السرعة المطلقة لـ M

$\vec{V_e}$ السرعة الجرية لـ M مع R_s و $\vec{V_r}$ السرعة النسبية لـ M في R_s

وحسب تعريف الحركة الجرية (3) (2) بشكل عام وهي سرعة نقطة خاضعة في الحركة العامة (3)

$\vec{V_e} = \vec{V}(M/R) = \vec{V}(O_s) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_s M}$ $= \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R$
$M \in R_s$

ومن تعريف السرعة النسبية (3) (3)

$\vec{V_r} = \vec{V}(M/R_s) = \frac{d\vec{O_s M}}{dt}\Big|_{R_s} = \dot{X_s}\vec{I_s} + \dot{Y_s}\vec{J_s} + \dot{Z_s}\vec{K_s}$
$M \notin R_s$

نعوض في (1) نجد (2)

$\vec{V_a} = \vec{V}(O_s/R) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_s M} + \dot{X_s}\vec{I_s} + \dot{Y_s}\vec{J_s} + \dot{Z_s}\vec{K_s}$

و. هـ. م.

... الثاني

ج 2. حساب التسارع المطلق $\vec{\Gamma}$ للنقطة M :

ننطلق من النظرية (1) $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ ①

و منه نشتق طرفي (1) رياضيا في R

رياضيا $\vec{\Gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V}_e}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_R$ ②

$$\vec{\Gamma}_a = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}(O_s/R) + \vec{\omega}\wedge\vec{O_sM} + \dot{x}_s\vec{I}_s + \dot{y}_s\vec{J}_s + \dot{z}_s\vec{K}_s\right]\Big|_R \quad ② \text{ ثلاث}$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}(O_s/R)}{dt}\right|_R + \left.\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM})\right|_R + \left.\frac{d}{dt}(\dot{x}_s\vec{I}_s + \dot{y}_s\vec{J}_s + \dot{z}_s\vec{K}_s)\right|_R \quad (2)$$

علما أنه من تعريف التسارع أن نكتب

$$\vec{\Gamma}_{O_s} = \left.\frac{d\vec{V}(O_s/R)}{dt}\right|_R \quad (3)$$

و نشتق الحد الثاني من (2) فنجد

$\vec{\varepsilon}$ متجه تسارع الدوران

$$\left.\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM})\right|_R = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge\left.\frac{d\vec{O_sM}}{dt}\right|_R$$

$$= \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge\left[\left.\frac{d\vec{O_sM}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{O_sM}}{dt}\right|_R\right]$$

$M \in R_s$ $\quad$ $M \notin R_s$

③

$$= \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM} + \vec{V}_r]$$

$$= \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM}) + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r \quad (4)$$

و نجري الاشتقاق المطلق للحد الثالث من (2)

$$\left.\frac{\vec{V}_r}{t}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}(\dot{x}_s\vec{I}_s + \dot{y}_s\vec{J}_s + \dot{z}_s\vec{K}_s)\right|_R = \frac{d\dot{x}_s}{dt}\vec{I}_s + \frac{d\dot{y}_s}{dt}\vec{J}_s + \frac{d\dot{z}_s}{dt}\vec{K}_s$$

$$+ \dot{x}\left.\frac{d\vec{I}_s}{dt}\right|_R + \dot{y}_s\left.\frac{d\vec{J}_s}{dt}\right|_R + \dot{z}_s\left.\frac{d\vec{K}_s}{dt}\right|_R$$

$$= \ddot{x}_s\vec{I}_s + \ddot{y}_s\vec{J}_s + \ddot{z}_s\vec{K}_s + \vec{\omega}\wedge[\dot{x}\vec{I}_s + \dot{y}_s\vec{J}_s + \dot{z}_s\vec{K}_s] \; ; \; \vec{\Gamma}_r = \ddot{x}_s\vec{I}_s + \ddot{y}_s\vec{J}_s + \ddot{z}_s\vec{K}_s$$

حيث

③

$$\left.\frac{d\vec{I}_s}{dt}\right|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{I}, \quad \left.\frac{d\vec{J}_s}{dt}\right|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{J}_s, \quad \left.\frac{d\vec{K}_s}{dt}\right|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{K}_s$$

و نستفيد من تعريف السرعة النسبية والتسارع النسبي نجد أن

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{V}_r\right|_R = \vec{\Gamma}_r + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r \quad (5)$$

بالتعويض (3) و (4) و (5) في (2) نجد

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}(O_s/R) + \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM}) + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r + \vec{\Gamma}_r + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r \quad (6)$$

حيث تعريف التسارع الجري (التسارع الناتج عن الحركة ...)

$$\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}(O_s|R) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_sM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O_sM}) \quad (7)$$

نعوض 7 في (6) فنجد :

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_r + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

وهكذا نجد أنه يوجد بالإضافة إلى مجموع التسارعين النسبي والجري يوجد أيضاً $2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ وهو ليس نسبياً ولا جرياً فسماه كوريوليس

تسارعاً متمماً ورمزله بـ $\vec{\Gamma}_C$ وبهذا الشكل نكتب

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_C$$

و.هـ.م.

7 : ج

$$I_G = \rho \iint_S (x^2+y^2)\, ds = \rho \iint_S r^2\, dx\, dy$$

ننتقل إلى القطبية

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$ds = dx\,dy = |J|\, dr\, d\varphi$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \Rightarrow dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$$

$0 \le \theta \le 2\pi$;

$0 \le r \le R = 1$

$$I_G = \rho \int_0^{R=1} r^3\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\rho\pi}{4} = \frac{\rho\pi}{2} \quad (3)$$

$$I_G = 2 I_{Gx} \Rightarrow I_{Gx} = I_G/2 = \frac{\rho\pi}{4} \quad (2)$$

$I_O = md^2 + I_G$, $d = 1$

$$I_O = \rho\pi + \frac{\rho\pi}{2} = \frac{3}{2}\rho\pi \quad (2)$$

و.هـ.م.

9 : ج

$dV = dx\,dy\,dz$, $x^2+y^2+z^2 = 1$

$$I_G = \rho \int_V r^2\, dV = \rho \int_V r^2\, dx\, dy\, dz \quad (1)$$

بالانتقال إلى الكروية ،

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$,

$z = r\cos\theta$ (3)

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le r \le 1$

$dV = |J|\, dr\, d\theta\, d\varphi$, (2)

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \quad (2)$$

$$I_G = \rho \int_0^1 r^4 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\rho 4\pi}{5} = 3 I_{GXZ}$$

وبالتالي

$$I_{GXY} = I_{GYZ} = I_{GZX} = \frac{\rho 4\pi}{15} \quad (1)$$

و.هـ.م.

Scanned by CamScanner

ج: أجب على السؤال التالي:

.1 إن معادلة الجسم هي

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$dV = dxdydz$: نجري التحويل التالي

$$\frac{X}{a}=x \Rightarrow X=ax,\ \frac{Y}{b}=y \Rightarrow Y=by,\ \frac{Z}{c}=z \Rightarrow Z=cz$$

فنحصل على المعادلة

(3)

$x^2+y^2+z^2=1$ معادلة كرة

ومنه

$$dV = a\cdot b\cdot c\, dx\cdot dy\cdot dz = abc\, dV_1$$ و dV_1 عنصر حجم من حجم الكرة

$$I_{GXZ}=\rho\int_V Y^2 dV = a\cdot b^3 c\rho\int_{V_1} y^2 dV_1 = a\cdot b^3\cdot c\cdot I_{Gxz}$$

ومن المسألة الرابعة $I_{Gxz}=\frac{\rho 4}{15}\pi$

(3) $I_{GXZ}=\left(\rho\frac{4}{3}a\cdot bc\pi\right)\frac{b^2}{5}=\frac{m}{5}b^2$

(2) $I_{GYZ}=\rho\int_V x^2 dV = a^3 bc\rho\int_{V_1} x^2 dxdydz = \left(\rho\frac{4}{3}abc\pi\right)\frac{a^2}{5} = \frac{m a^2}{5}$

وبنفس الطريقة

(2) $I_{GXY}=\frac{mc^2}{5}$

(2) $I_G = I_{GYZ}+I_{GZX}+I_{GXY}=\frac{m}{5}(a^2+b^2+c^2)$

(2) $I_O = md^2+I_G = mb^2+\frac{m}{5}(a^2+b^2+c^2)=\frac{m}{5}(a^2+6b^2+c^2)$

(2) $I_{OXZ}=md^2+I_{GXZ}=mb^2+\frac{mb^2}{5}=\frac{6mb^2}{5}$

(2) $I_{OXY}=md^2+I_{GXY}=\frac{mc^2}{5}$; $d=0$

(2) $I_{OYZ}=md^2+I_{GYZ}=\frac{ma^2}{5}$; $d=0$

(5)

2: القرص يتحرك حركة مستوية فيتغير بزاوية دورانه حول مركز كتلته ولتكن $\theta = (\widehat{GX, GX_1})$ وإحداثييه $X(G), Y(G)$ ولكن بسبب القيد (الاستناد على السطح الداخلي)

$X(G)=(R-r)\cos\varphi$

$Y(G)=(R-r)\sin\varphi$

وهكذا فإن الوسطاء أصبحت تتغير θ و الزاوية القطبية التي تعين G وهو φ

لكن من طبيعة القيد يؤدي الى القرص لتدحرج بدون انزلاق وبالتالي:

$\vec{V}(I)=\vec{V}(I)$ ، $I\in C(O,R)$ ، $I\in S$

ولكن $\vec{V}(I)=0$ لذلك $I\in C(O,R)$

$\vec{V}(I)=(R-r)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi+\dot{\theta}r\vec{e}_r$ ، $I\in C(G,r)$

إذن $(R-r)\dot{\varphi}=r\dot{\theta}$ وبالتالي القرص وسيط مستقل وحيد وليكن

$\frac{r}{R_0}$ ؛ نتيجة

- إن نقطة التماس آنياً في كل لحظة معدومة السرعة آنياً وبالتالي فهي مركز آني للدوران

- ان المتدحرج هو المحل الهندسي للمركز الآني للدوران آنياً في R_s وهنا فمن الواضح ان هذا المتدحرج هو محيط القرص لأن I لا تفارقه . (5)

- ان منحنى القاعدة هو المحل الهندسي للمركز الآني للدوران آنياً في R وهنا فمن الواضح ان هذا المنحني القاعدة هو منحني السلك لأن I لا تفارقه (5)

و . هـ . م ،

ط2 الحركة لجسم صلب فيه نقطة ثابتة هي دورانية وتتعين بثلاث زوايا هي زوايا أولر:
φ الترنح ، θ التأرجح
ψ الدوران الذاتي
لكن التأرجح معلوم $\theta = \frac{\pi}{2}$ بالفرض ،
اذن بقي وسيعين هما
φ الترنح و ψ الدوران الذاتي وهما مستقلان عن بعضهما .

(11)

Z_s, Z, Y, X, X_s, X_1, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, φ, ψ

35

ط : لايجاد السطح المتدحرج نجد :

$$p_s = \dot{\varphi}\sin\psi,\quad q_s = \dot{\varphi}\cos\psi,\quad r_s = \dot{\psi}$$

But $\frac{x_s}{p_s} = \frac{y_s}{q_s} = \frac{z_s}{r_s} \Rightarrow \frac{x_s}{\dot{\varphi}\sin\psi} = \frac{y_s}{\dot{\varphi}\cos\psi} = \frac{z_s}{\dot{\psi}}$

معادلات المحور الآني للدوران وبحذف الوسيط نجد أن المتدحرج : (12)

$$x_s^2 + y_s^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\psi}^2} z^2$$

سطح مخروطي محوره هو oz_s .

ط3

$$p = \dot{\psi}\sin\varphi ,\quad q_s = -\dot{\psi}\cos\varphi ,\quad r = \dot{\varphi}$$

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{x}{\dot{\psi}\sin\varphi} = \frac{y}{-\dot{\psi}\cos\varphi} = \frac{z}{\dot{\varphi}}$$

معادلات المحور الآني للدوران وبحذف الوسيط نجد :

(12)

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{\psi}^2}{\dot{\varphi}^2} z^2$$

وهو سطح مخروطي محور تناظره oz .

و . هـ . م ،